

Применение модифицированной вариационной постановки векторного метода конечных элементов для моделирования гармонического электрического поля в областях с криволинейными экранами

Д. В. ДОБРОЛЮБОВА¹, Э. П. ШУРИНА^{1,2,*}

¹Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, 630090, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск, Россия

*Контактный автор: Шурина Элла Петровна, e-mail: shurina@sinor.ru

Поступила 27 марта 2021 г., доработана 28 апреля 2021 г., принята в печать 4 мая 2021 г.

Рассматриваются особенности применения модифицированной вариационной постановки векторного метода конечных элементов (ВМКЭ), основанной на замене тонких сильнопроводящих объектов токонесущими поверхностями, для моделирования гармонического электрического поля в областях с криволинейными экранами при различном типе возбуждения поля. Исследуется применимость модифицированной вариационной постановки в широком диапазоне частот.

Ключевые слова: векторный метод конечных элементов, редуцированная модель, электромагнитный экран.

Цитирование: Добролюбова Д.В., Шурина Э.П. Применение модифицированной вариационной постановки векторного метода конечных элементов для моделирования гармонического электрического поля в областях с криволинейными экранами. Вычислительные технологии. 2021; 26(3):26–41. DOI:10.25743/ICT.2021.26.3.003.

Введение

В нефтегазовой отрасли широко применяются электромагнитные методы измерения: скважинный каротаж, геологическая характеристика коллекторов, мониторинг гидро-разрыва пласта. Численное моделирование позволяет исследовать различные конфигурации источников и приемников и предложить рекомендации по измерительной процедуре [1]. При численном моделировании электромагнитных процессов в скважине следует учитывать множество факторов, в частности наличие металлической обсадки. Численное моделирование электромагнитного поля в области с обсаженной скважиной осложняется ее геометрической и физической разномасштабностью.

Для снижения вычислительных затрат при использовании сеточных методов применяются различные подходы, основанные на редуцировании модели. В случае, когда

вмещающая среда и источник осесимметричны, задача может рассматриваться в двумерной постановке в цилиндрических координатах [2]. В общем случае вмещающая среда имеет сложную внутреннюю структуру, и для получения физически релевантного решения необходимо использовать трехмерное представление.

В ряде работ металлическая обсадка скважины заменяется эквивалентным распределением электрических диполей [1, 3] и рассматривается как источник вторичного электромагнитного поля. В [3] вычислительная схема для трехмерной задачи распределения гармонического электромагнитного поля строится на основе метода конечных разностей, в [4] — на основе метода конечных элементов, в [5] — метода конечных объемов. Такой подход, как правило, ориентирован на вертикальные скважины.

Для сеточных методов сложность представляет не только высокая контрастность электромагнитных свойств металлической обсадки по отношению к вмещающей среде, но и необходимость разбиения малой толщины. В последнее время широко применяются адаптивные $h-p$ -стратегии [6] и несогласованные сеточные разбиения [7], позволяющие снизить количество степеней свободы в дискретной модели.

Исходя из геометрических особенностей обсадки представляется целесообразным использование аппарата тонких оболочек (thin-sheet approach) [8], специальным образом учитывающего изменение электромагнитного поля на границе раздела высокопроводящего объекта и вмещающей среды. Данный подход позволяет избежать введения объемной конечно-элементной дискретизации, тонкий контрастный объект заменяется поверхностью, на которой задаются импедансные передающие условия, отражающие поведение электромагнитного поля и учитывающие электрофизические характеристики объекта.

В [8] приводится анализ публикаций, посвященных импедансным краевым условиям на границах материалов с контрастными электрофизическими свойствами. Импедансные передающие условия в общем виде впервые сформулированы Щукиным и Леонтовичем [9], они получили дальнейшее развитие в работах [10, 11] и др. Эти условия учитывают скачок тангенциальной компоненты магнитного поля на границе раздела с проводником, нормальная компонента напряженности электрического поля предполагается постоянной [12, 13], либо вводятся специальные функции, описывающие поведение электромагнитного поля внутри объекта малой толщины [14, 15]. Импедансные передающие условия могут быть определены локально на элементах сеточного разбиения редуцированной размерности двух типов: плоские элементы (shell elements) [16] и экранирующие (shielding elements) элементы [17]. В работах [8, 18, 19] условия такого типа получены на основании асимптотического представления, в котором толщина контрастного объекта используется как малый параметр.

Данный подход получил широкое применение при моделировании тонкослоистых композитных материалов [20] и электромагнитных экранов [21, 22]. Передающие импедансные условия для геометрически более сложных экранов рассматриваются в [23] (сферические и цилиндрические экраны) и в [24] (перфорированные цилиндрические экраны).

В настоящей работе для моделирования гармонического электромагнитного поля в областях с тонкими криволинейными экранами используется модифицированная вариационная постановка векторного метода конечных элементов (ВМКЭ), позволяющая аппроксимировать тонкие высокопроводящие включения и экраны токонесущей поверхностью [25]. Рассматриваются различные типы возбуждения поля и варианты расположения источника, диапазон частот от 100 кГц до 100 МГц.

1. Постановка задачи

Расчетная область $\Omega \in R^3$ с липшицевой границей $\partial\Omega$ (рис. 1) состоит из вмещающей среды Ω_m с электрофизическими характеристиками $\mu_m, \varepsilon_m, \sigma_m$, полого цилиндра Ω_c длиной L с толщиной стенок $h \ll L$, имеющего электрофизические характеристики $\mu_c, \varepsilon_c, \sigma_c \gg \sigma_m$, подобласти Ω_w с электрофизическими характеристиками $\mu_w, \varepsilon_w, \sigma_w$.

Рассматривается гармоническое электромагнитное поле, напряженность электрического поля \mathbf{E} [В/м] описывается векторным уравнением Гельмгольца

$$\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{J}^{src} \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

где $k^2 = i\omega\sigma - \omega^2\varepsilon$; i — мнимая единица; $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота, Гц; σ — удельная электропроводность среды, См/м; ε — диэлектрическая проницаемость, Ф/м; μ — магнитная проницаемость, Гн/м; \mathbf{J}^{src} — вектор плотности тока источника, А/м².

На внешней границе $\partial\Omega$ заданы условия “большого бака”

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

где \mathbf{n} — внешняя единичная нормаль к поверхности $\partial\Omega$.

На внутренних границах Γ_{ci} и Γ_{co} выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_m^+ \times \mathbf{E}^+|_{\Gamma_{cm}} + \mathbf{n}_m^- \times \mathbf{E}^-|_{\Gamma_{cm}} &= 0, \quad m = i, o, \\ \mathbf{n}_m^+ \times \mathbf{H}^+|_{\Gamma_{cm}} + \mathbf{n}_m^- \times \mathbf{H}^-|_{\Gamma_{cm}} &= \mathbf{j}_{sm}, \quad m = i, o, \end{aligned}$$

где $\mathbf{n}_m^+, \mathbf{n}_m^-$ — внутренняя и внешняя нормали к поверхности Γ_{cm} ; \mathbf{j}_{sm} — плотность наведенного тока на Γ_{cm} , А/м² (рис. 1).

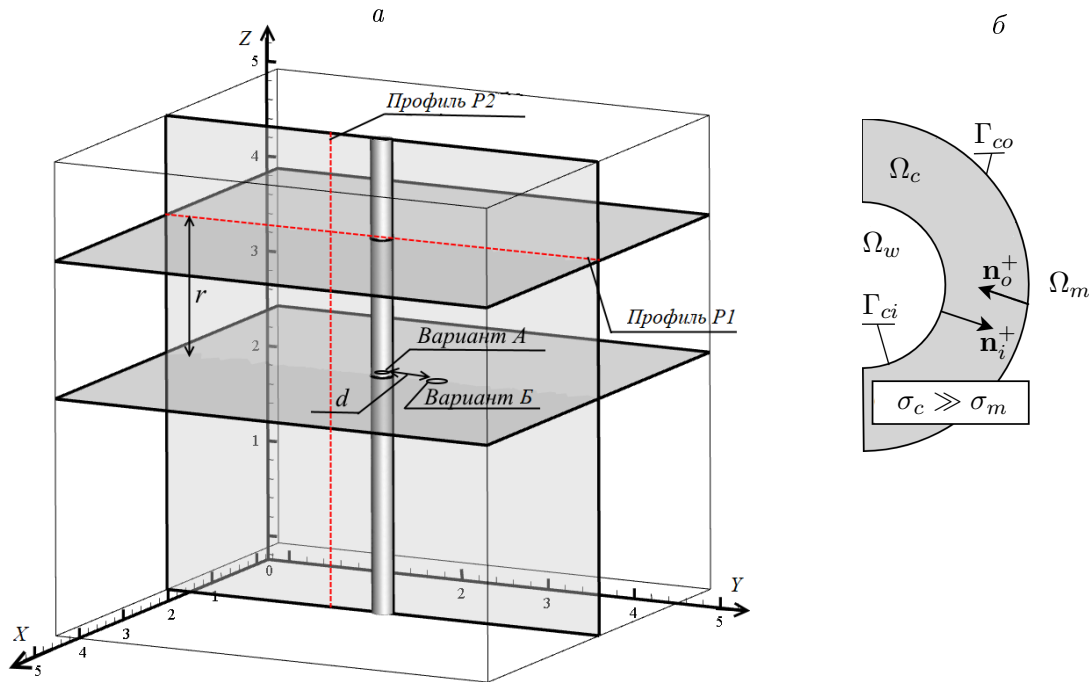


Рис. 1. Расчетная область с тонкостенным ($h \ll L$) сильнопроводящим ($\sigma_c \gg \sigma_m$) цилиндром (а). Здесь r — расстояние по оси OZ от центра источника до плоскости сечения. Фрагмент сечения расчетной области плоскостью XOY , проходящей через цилиндрическое включение (б)

Fig. 1. Computational domain with highly conductive ($\sigma_c \gg \sigma_m$) thin-walled ($h \ll L$) cylinder (а), r — distance along OZ axis from the loop center to XOY cross-section (б)

Так как $h \ll L$, $\sigma_c \gg \sigma_m$, напряженность электрического поля \mathbf{E} внутри сильнопроводящей области Ω_c стремится к нулю. В связи с этим Ω_c может быть аппроксимирована специальной границей раздела сред Γ , на которой наведен электрический ток с осредненной плотностью $\langle \mathbf{j} \rangle_\Gamma$:

$$\langle \mathbf{j} \rangle_\Gamma = h (\mathbf{n}_\Gamma \times (\mathbf{n}_\Gamma \times \sigma_c \mathbf{E})).$$

Здесь h — толщина полого цилиндра Ω_c , σ_c — удельная электропроводность подобласти Ω_c , \mathbf{n}_Γ — внешняя нормаль к токонесящей поверхности Γ . Тогда условие на границе Γ принимает вид

$$\mathbf{n}_\Gamma \times \mathbf{H}^+|_\Gamma - \mathbf{n}_\Gamma \times \mathbf{H}^-|_\Gamma = \langle \mathbf{j} \rangle_\Gamma.$$

2. Вариационная формулировка

Введем следующие функциональные пространства:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) &= \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \nabla \times \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \}, \\ \mathbf{H}_0(\mathbf{curl}, \Omega) &= \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) : \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \}. \end{aligned} \quad (3)$$

Вариационная постановка классического векторного метода конечных элементов для задачи (1), (2) в расчетной области Ω имеет следующий вид [26]:

для $\mathbf{J}^{src} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ найти $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ такое, что $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ выполняется

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{v} d\Omega + k^2 \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} d\Omega = -i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J}^{src} \cdot \mathbf{v} d\Omega. \quad (4)$$

Модифицированная вариационная формулировка ВМКЭ для области $\tilde{\Omega} = \Omega_m \cap \Omega_w$ с токонесящей поверхностью Γ имеет следующий вид [25]:

для $\mathbf{J}^{src} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ найти $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ такое, что $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ выполняется

$$\int_{\tilde{\Omega}} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{v} d\Omega + k^2 \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} d\Omega + i\omega h \int_{\Gamma} (\mathbf{n}_\Gamma \times \sigma_c \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{n}_\Gamma \times \mathbf{v}) dS = -i\omega \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{J}^{src} \cdot \mathbf{v} d\Omega. \quad (5)$$

Дискретная вариационная постановка. Введем $\mathcal{T}_h = \cup_i \tau_i$ — нерегулярное тетраэдральное разбиение расчетной области $\tilde{\Omega}$ с учетом тонкостенного цилиндра Ω_c как токонесящей поверхности Γ . В соответствии с (3) введем конечномерное подпространство $\mathbf{H}_0^h(\mathbf{curl}, \Omega) \subset \mathbf{H}_0(\mathbf{curl}, \Omega)$. Дискретная модифицированная вариационная постановка имеет следующий вид:

для $\mathbf{J}^{src} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ найти $\mathbf{E}^h \in \mathbf{H}_0^h(\mathbf{curl}, \Omega)$ такое, что $\forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{H}_0^h(\mathbf{curl}, \Omega)$ выполняется

$$\int_{\tilde{\Omega}} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^h \cdot \nabla \times \mathbf{v}^h d\Omega + k^2 \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{E}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + i\omega h \int_{\Gamma} (\mathbf{n}_\Gamma \times \sigma_c \mathbf{E}^h) \cdot (\mathbf{n}_\Gamma \times \mathbf{v}^h) dS = -i\omega \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{J}^{src} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega. \quad (6)$$

Дискретный аналог решения \mathbf{E}^h можно представить как

$$\mathbf{E}^h = \sum_i q_i \mathbf{w}_i^h, \quad (7)$$

где $\mathbf{w}_i^h \in \mathbf{H}_0^h(\mathbf{curl}, \Omega)$ — базисные функции Вебба первого порядка второго типа [27].

Подставив (7) в уравнение (6), получим

$$\mu^{-1}\mathbf{G} + \mathbf{k}^2\mathbf{B} + i\omega h\mathbf{S} = \mathbf{b},$$

где \mathbf{G} , \mathbf{B} — матрицы жесткости и массы [26]. Элементы локальных матриц \mathbf{G}^L , \mathbf{B}^L имеют вид

$$\mathbf{G}_{ij}^L = \int_{\tau_k \in T_h} \nabla \times \mathbf{w}_i^h \cdot \nabla \times \mathbf{w}_j^h d\Omega, \quad \mathbf{B}_{ij}^L = \int_{\tau_k \in T_h} \mathbf{w}_i^h \cdot \mathbf{w}_j^h d\Omega,$$

элементы локальных матриц \mathbf{S}^L определяются следующим образом:

$$\mathbf{S}_{km}^L = \int_{F_j \in \tau_i} (\mathbf{n}_{F_j} \times \sigma_c \mathbf{w}_k) \cdot (\mathbf{n}_{F_j} \times \mathbf{w}_m) dS.$$

Матрицы \mathbf{S}^L вычисляются локально на каждой грани F_j элемента τ_i , принадлежащей поверхности Γ .

3. Результаты вычислительного эксперимента

В [25] показано, что модифицированная вариационная постановка дает корректный результат в областях с тонкими сильнопроводящими включениями-пластинами и плоскими экранами в диапазоне частот от 100 кГц до 100 МГц при контрастности $\log(\sigma_c/\sigma_m) > 5$. В настоящей работе модифицированная вариационная постановка рассматривается применительно к тонкостенным ($h \ll L$) сильнопроводящим ($\sigma_c \gg \sigma_m$) цилиндрическим экранам. Рассмотрены следующие варианты возбуждения электрического поля:

- вариант А — токовая петля расположена *внутри* подобласти Ω_w ;
- вариант Б — токовая петля расположена *вне* подобласти Ω_w , в Ω_m .

Расчетная область Ω представляет собой куб со стороной 5 м. Материалы цилиндра Ω_c (радиус 10 см, толщина стенок $h = 1$ см) и вмещающей среды (рис. 1) являются немагнитными, $\mu_m = \mu_c = \mu_w = \mu_0$, диэлектрическая проницаемость материалов равна диэлектрической проницаемости вакуума, $\varepsilon_m = \varepsilon_c = \varepsilon_w = \varepsilon_0$, удельная электропроводность вмещающей среды $\sigma_m = 0.01$ См/м, удельная электропроводность подобласти Ω_w $\sigma_w = 0.5$ См/м, удельная электропроводность цилиндра $\sigma_c = 7.69 \cdot 10^6$ См/м. Радиус токовой петли 5 см, сила тока 1 А, центр в точке (x_c, y_c, z_c) . Рассмотрен диапазон частот от 100 кГц до 50 МГц.

Для решения задачи (1), (2) применяются вариационная постановка (4) с учетом объекта Ω_c как трехмерного (решение в формулах обозначается верхним индексом “ v ”) и модифицированная постановка (5), учитывающая цилиндрическое включение как токонесущую поверхность (решение в формулах обозначается верхним индексом “ s ”). Анализ решения $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ выполняется покомпонентно в точках $x_k \in P_1 : (x_p = x_c, z_p = z_c, y_p \in [0; 5])$ (рис. 1) на расстоянии r от плоскости расположения источника и в точках $x_k \in P_2 : (x_p = x_c, y_p = y_c + d, z_p \in [0; 5])$. Относительная погрешность оценивалась в нормах $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_m$ [28]:

$$\delta^1 = \left(\sum_i^{N_p} |E_k^v(x_i) - E_k^s(x_i)| \right) / \left(\sum_i^{N_p} |E_k^v(x_i)| \right), \quad (8)$$

$$\delta^m = \frac{\max_{1 \leq i \leq N_p} |E_k^v(x_i) - E_k^s(x_i)|}{\max_{1 \leq i \leq N_p} |E_k^v(x_i)|}, \quad (9)$$

где $k = x, y, z$, $x \in P_l$, $l = 1, 2$ (рис. 1). Так как оценки погрешности в нормах (8), (9) хорошо согласуются между собой, в статье представлены результаты в норме (8).

Рассматривалось поведение решения, полученного в постановке (5), вблизи и на удалении от экрана в точках $x_i \in P_2$ на различном расстоянии d (рис. 1) от поверхности Γ

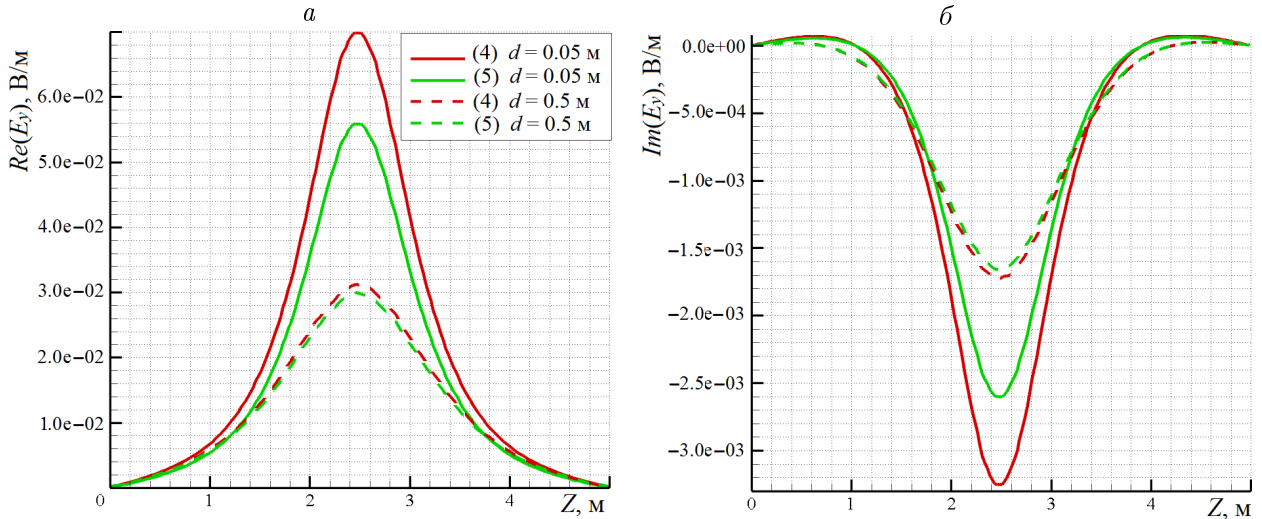


Рис. 2. Вариант Б. Решение, полученное в постановках (4) и (5), вывод в точках $x_i \in P_1$ на различном расстоянии d от боковой поверхности Γ . Действительная (а) и мнимая (б) части компоненты E_y

Fig. 2. Variant B: solution of the variational problems (4), (5) over the line $x_i \in P_1$, d — distance from the lateral surface of the cylinder. Real (a) and imaginary (б) parts of E_y

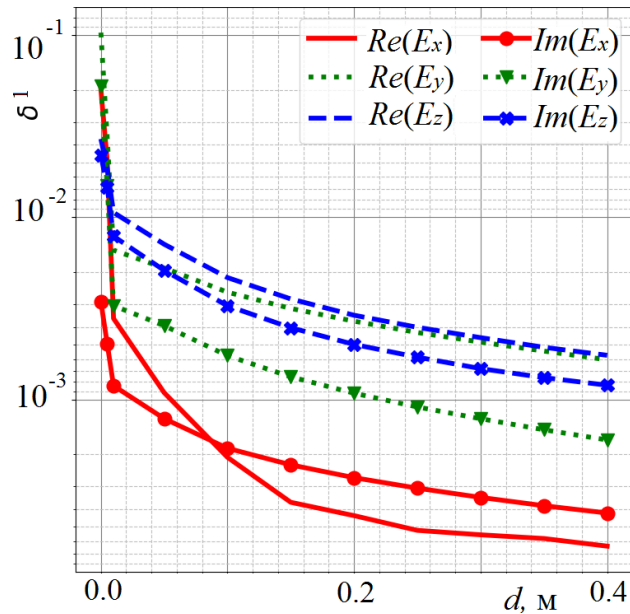


Рис. 3. Вариант Б. Относительная погрешность δ^1 в норме $\|\cdot\|_1$

Fig. 3. Variant B: relative error δ^1 in the $\|\cdot\|_1$ norm

(вариант Б). Расстояние d варьировалось от 0.01 до 0.4 м. На рис. 2 приведена погрешность компонент напряженности электрического поля $\mathbf{E}^s = Re(\mathbf{E}^s) + iIm(\mathbf{E}^s)$. В Ω_m на удалении от сильнопроводящего объекта ($d > 0.05$ м) решение, полученное в соответствии с (5), качественно и количественно ведет себя так же, как решение, полученное ВМКЭ (рис. 2, 3). Вблизи экрана ($d \leq 0.05$ м) решение, полученное модифицированной постановкой, значительно отличается от решения, полученного ВМКЭ (рис. 2, 3), так как в геометрической модели при использовании модифицированной постановки объем Ω_c не учитывается. Далее в работе при вычислении погрешности δ в точках $x_i \in P_1$ из рассмотрения исключаются точки $x_i \in P_1 \cap \Omega_c$.

3.1. Применение модифицированной вариационной постановки при различных типах возбуждения поля

3.1.1. Вариант А: токовая петля расположена внутри подобласти Ω_c

Напряженность электрического поля \mathbf{E} в области Ω_w , экранированной сильнопроводящим цилиндром Ω_c , значительно ослабляется. Внутри области Ω_w преобладает мнимая компонента $Im(\mathbf{E})$ напряженности электрического поля. Тонкая сильнопроводящая оболочка Ω_c является источником вторичного электрического поля, полярность которого противоположна полярности электрического поля, возбуждаемого генераторной петлей. Действительная компонента $Re(\mathbf{J})$ плотности электрического тока ($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$) сосредоточена на внутренней поверхности Γ_{ci} , мнимая компонента $Im(\mathbf{J})$ — на внешней поверхности Γ_{co} . Вблизи источника наблюдается преобладание действительной компоненты, $Re(\mathbf{J}) \gg Im(\mathbf{J})$. На удалении ($z > z_c + 0.5$ м) от источника внутри Ω_c преобладает мнимая компонента плотности электрического тока, $Im(\mathbf{J}) \gg Re(\mathbf{J})$.

При варианте А на частоте 100 кГц значение напряженности электрического поля внутри области Ω_m , экранированной сильнопроводящим цилиндрическим объектом, превышает значение напряженности электрического поля вовне на расстоянии 0.4 м по оси OZ от плоскости расположения источника. На большем удалении от источника преобладает поле во внешней области, возбуждаемое тонким сильнопроводящим объек-

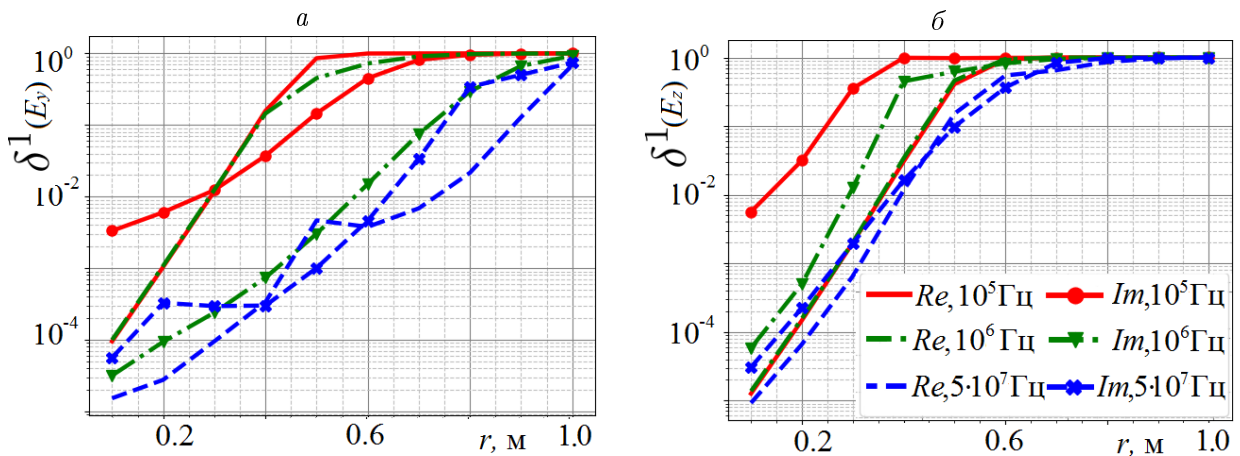


Рис. 4. Вариант А. Относительные погрешности δ^1 в точках $x_k \in P_1 : (x_p = x_c, z_p = z_c + r, y_p \in [0; 5])$ на различных частотах для компонент E_y (а) и E_z (б)

Fig. 4. Variant A: relative error δ^1 over the line $P_1 : (x_p = x_c, z_p = z_c + r, y_p \in [0; 5])$ at different frequencies for E_y (a) and E_z (б)

том как поверхностным источником. С возрастанием частоты расстояние по оси OZ от плоскости расположения источника, на котором начинает преобладать вторичное поле, увеличивается.

В области Ω_w в точках $x_k \in P_1 : (x_p = x_c, z_p = z_c + r, y_p \in [0; 5])$ на частоте 1 МГц при $r < 0.4$ м действительная компонента $Re(\mathbf{E}^s)$ напряженности электрического поля \mathbf{E} , полученной модифицированной вариационной постановкой (5), аппроксимируется корректно (рис. 4), мнимая часть $Im(\mathbf{E}^s)$ корректно аппроксимируется при $r < 0.6$ м. Напряженность электрического поля в экранированной области Ω_m , полученная модифицированной вариационной постановкой (5), близка к нулю и на несколько порядков меньше, чем напряженность электрического поля, вычисленная классическим МКЭ. На более высоких частотах модифицированная вариационная постановка корректно аппроксимирует напряженность электрического поля внутри области Ω_w на большем расстоянии r от источника, расположенного внутри цилиндра (рис. 4).

3.1.2. Вариант Б: токовая петля расположена вне подобласти Ω_w , в подобласти Ω_m

Напряженность электрического поля, возбуждаемого генераторной петлей, расположенной вне области, ограниченной тонкой сильнопроводящей оболочкой Ω_c , существенно ослабляется в области Ω_w , экранированной Ω_c . На внешней поверхности цилиндрической оболочки Ω_c наводится электрический ток, порождающий вторичное электромагнитное поле. Плотность \mathbf{J} электрического тока сосредоточена на внешней поверхности Γ_{co} .

Мнимая часть напряженности электрического поля $Im(\mathbf{E})$ корректно аппроксимируется модифицированной постановкой (5) на любом рассмотренном расстоянии r по оси OZ от плоскости расположения источника. Действительная часть $Re(\mathbf{E})$ имеет бóльшую погрешность аппроксимации, чем мнимая, поскольку амплитуда действительной части на несколько порядков меньше, чем амплитуда мнимой части $Im(\mathbf{E})$ (рис. 5). С возрастанием частоты погрешность уменьшается.

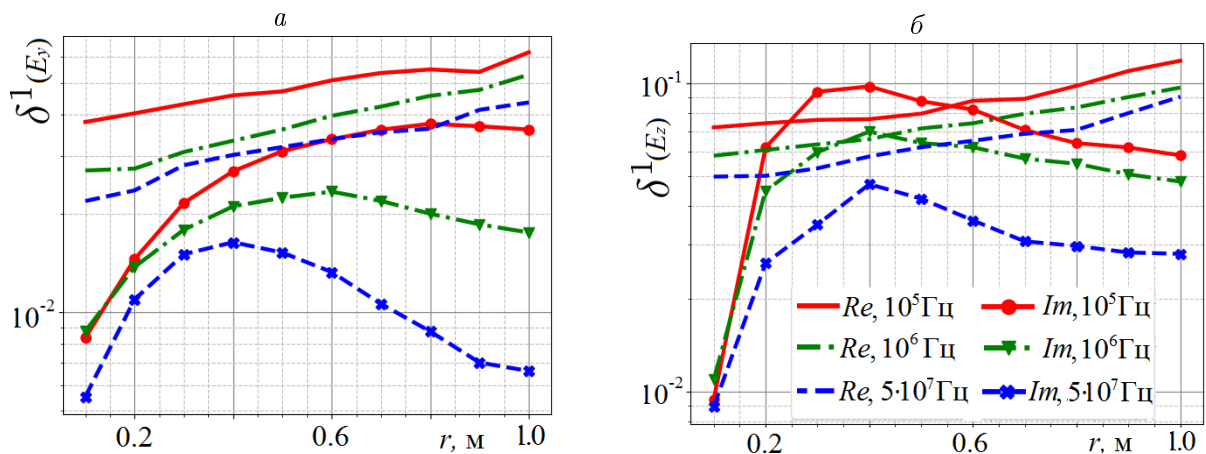


Рис. 5. Вариант Б. Относительные погрешности δ^1 в точках $x_k \in P_1 : (x_p = x_c, z_p = z_c + r, y_p \in [0; 5])$ на различных частотах для компонент E_y (а) и E_z (б)

Fig. 5. Variant Б. Relative error δ over the line $P_1 : (x_p = x_c, z_p = z_c + r, y_p \in [0; 5])$ at different frequencies for E_y (a) and E_z (б)

3.2. Положение источника

Угол между нормалью к плоскости расположения источника $z = z_c$ и осью симметрии цилиндра Ω_c обозначен Θ . Рассмотрены следующие варианты: $\Theta = 0, \pi/4, \pi/2$.

Вариант А: модифицированная вариационная постановка дает корректный результат на большем удалении по оси OZ от плоскости источника, когда ось цилиндра перпендикулярна нормали к плоскости источника ($\Theta = \pi/2$) либо расположена к ней под углом ($\Theta = \pi/4$), чем в случае, когда ось цилиндра сонаправлена нормали плоскости источника ($\Theta = 0$) (табл. 1).

Вариант Б: модифицированная вариационная постановка дает лучший результат, когда ось симметрии сильнопроводящего цилиндра перпендикулярна нормали к плоскости источника (табл. 1).

Для варианта А рассматривались различные диаметры тонкой цилиндрической оболочки. Таким образом, варьировалось расстояние между источником и боковой поверхностью Γ . На рис. 6 приведена погрешность вычисления компонент напряженности электрического поля \mathbf{E} , полученная при использовании модифицированной вариационной постановки, в расчетной области с цилиндрическим объектом радиуса 20 см, расстояние d от токовой петли до боковой поверхности Γ составляет 15 см.

Действительная часть $Re(\mathbf{E}^s)$ напряженности электрического поля, полученной модифицированной вариационной постановкой, корректно аппроксимируется внутри полого цилиндрического объекта радиусом 20 см при $r < 0.5$ м, мнимая часть $Im(\mathbf{E}^s)$ корректно аппроксимируется при $r < 1$ м.

Таким образом, при удалении источника поля от боковой поверхности модифицированная вариационная постановка лучше аппроксимирует напряженность электрического поля внутри цилиндрического объекта (рис. 6). В варианте А расстояние между источником поля и боковой поверхностью экрана, как правило, обусловлено конструктивными особенностями (например, диаметр стальной трубы обсадки скважины).

Т а б л и ц а 1. Относительная погрешность δ при различных положениях источника. Частота 1 МГц, расстояние $r = 0.5$ м до плоскости расположения источника по соответствующей оси
Table 1. Relative error δ for different source locations at the frequency of 1 MHz, $r = 0.5$ m from the source center

Компонента	Вариант А			Вариант Б		
	$\Theta = 0$	$\Theta = \pi/4$	$\Theta = \pi/2$	$\Theta = 0$	$\Theta = \pi/4$	$\Theta = \pi/2$
δ^l						
$Re(E_x)$	9.73e-01	6.07e-01	5.69e-01	7.39e-02	1.52e-02	1.53e-02
$Re(E_y)$	1.00e+00	8.71e-02	9.99e-01	3.68e-02	3.82e-02	3.52e-02
$Re(E_z)$	1.04e+00	6.80e-01	9.50e-01	7.13e-02	5.91e-02	8.62e-02
$Im(E_x)$	1.60e-01	1.80e-03	1.25e-03	3.80e-02	5.03e-02	1.69e-02
$Im(E_y)$	8.46e-01	9.74e-03	4.38e-01	2.12e-02	1.58e-02	1.65e-02
$Im(E_z)$	7.49e-01	4.88e-03	7.71e-02	6.37e-02	5.43e-02	5.74e-02
δ^m						
$Re(E_x)$	9.98e-01	3.50e-01	3.22e-01	1.86e-01	4.54e-02	3.12e-02
$Re(E_y)$	1.00e+00	6.20e-01	1.00e+00	9.27e-02	2.42e-01	8.54e-02
$Re(E_z)$	9.98e-01	5.76e-01	1.00e+00	1.51e-01	8.32e-02	9.39e-02
$Im(E_x)$	2.92e-02	2.81e-04	2.25e-04	6.62e-02	1.04e-01	4.50e-02
$Im(E_y)$	3.81e-01	6.04e-04	2.80e-02	5.27e-02	7.30e-02	9.11e-02
$Im(E_z)$	5.42e-01	6.59e-04	5.03e-03	6.23e-02	8.74e-02	9.38e-02

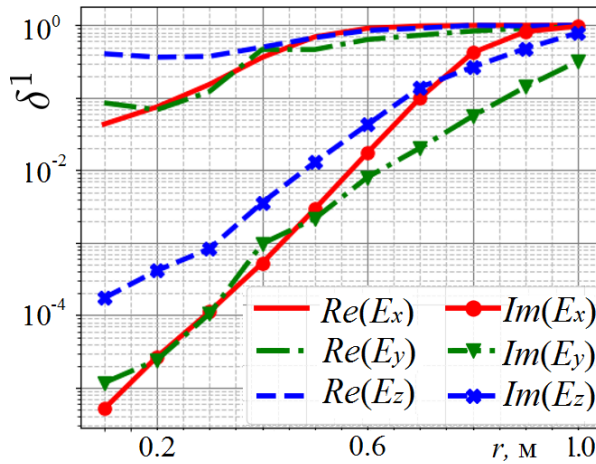


Рис. 6. Вариант А. Относительная погрешность δ^1 в точках $x_k \in P_1 : (x_p = x_c, z_p = z_c + r, y_p \in [0; 5])$, расстояние от токовой петли до боковой поверхности Γ в точках $x_k \in P_1$ $d = 15$ см, частота 1 МГц

Fig. 6. Variant A. Relative error δ over the line $P_1 : (x_p = x_c, z_p = z_c + r, y_p \in [0; 5])$, source loop is located at $d = 15$ cm from the lateral surface Γ of the cylinder, frequency 1 MHz

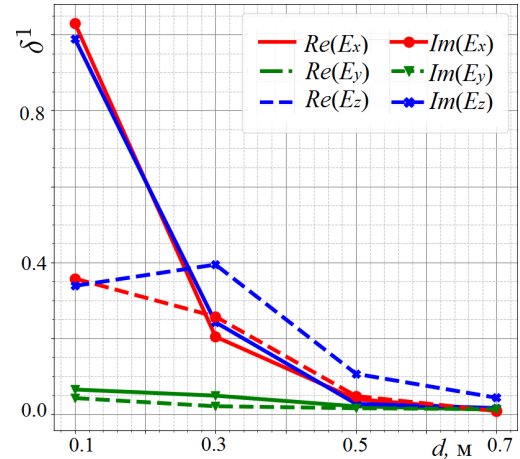


Рис. 7. Вариант Б. Изменение погрешности вычисления компонент \mathbf{E} с увеличением расстояния d между источником и поверхностью Γ

Fig. 7. Variant B: Variation in the relative error δ for the components \mathbf{E} with increasing distance d between the source and the surface Γ

Для варианта Б были рассмотрены различные по удаленности от боковой поверхности Γ цилиндрического сильнопроводящего объекта положения соленоидального источника (частота 1 МГц). Расстояние между источником и боковой поверхностью цилиндра варьировалось от 0.1 до 1 м. Погрешность вычислялась в точках $x_k \in P_1 : (x_p = x_c, z_p = z_c + r, y_p \in [0; 5])$.

Модифицированная вариационная постановка корректно аппроксимирует все компоненты напряженности электрического поля \mathbf{E} в случае, когда источник удален от боковой поверхности Γ (рис. 7). На расстоянии $d = 0.1$ м поле имеет сложную конфигурацию, которая не может быть корректно учтена упрощенной моделью, реализованной в модифицированной вариационной постановке.

3.3. Расчетная область с источником, экранированным цилиндрической оболочкой. Проводящее включение

Рассмотрен вариант А. Область Ω_m содержит проводящее включение Ω_i размерами $1 \times 2 \times 0.1$ м, центр которого расположен в той же плоскости, что и центр источника ($x = 1.75, y = y_c, z = z_c$). Электрофизические характеристики проводящего включения Ω_i : $\mu_i = \mu_0, \varepsilon_i = \varepsilon_0, \sigma_i = 0.1$ См/м. Частота 1 МГц.

Решение, полученное модифицированной вариационной постановкой, за пределами области, ограниченной тонкостенным сильнопроводящим объектом, отличается от решения, полученного ВМКЭ, как количественно (на 3–4 порядка), так и качественно. Тем не менее решение, полученное модифицированной вариационной постановкой, позволяет идентифицировать наличие проводящего объекта в области, экранированной тонкой сильнопроводящей цилиндрической оболочкой (рис. 8).

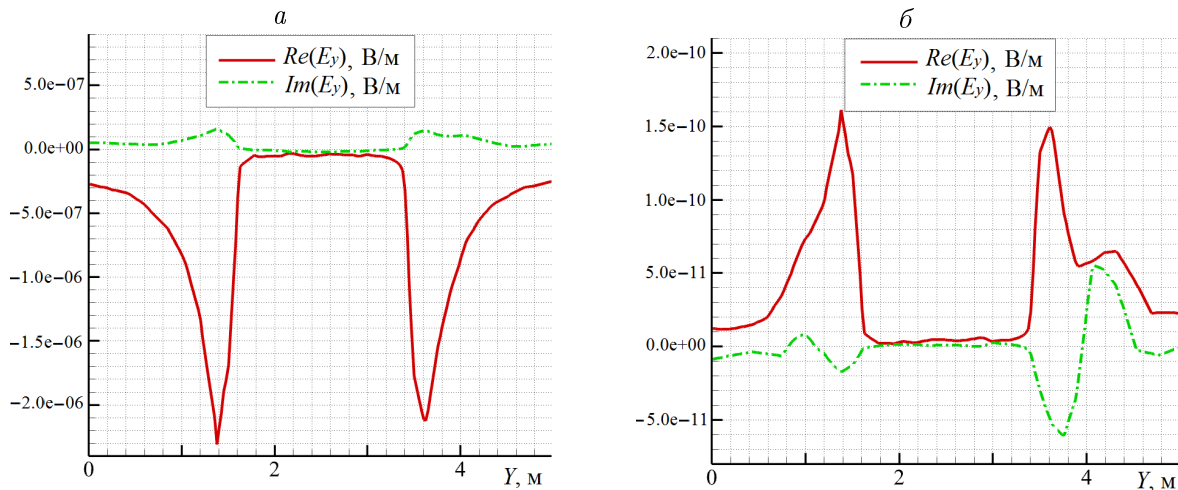


Рис. 8. Компонента E_y напряженности электрического поля \mathbf{E} по профилю Y , проходящему через проводящий объект: решение получено МКЭ (а) и модифицированной постановкой (б) (5) (б)
 Fig. 8. E_y component of the electric field \mathbf{E} along the Y -profile passing through the conductive object: standard FEM (a) and modified variational formulation (5) (b)

Точность решения СЛАУ $\alpha = 10^{-9}$ обеспечивает корректное решение ВМКЭ, но не позволяет получить корректное решение модифицированной вариационной постановкой. Решение, приведенное на рис. 8, получено при точности решения СЛАУ $\alpha = 10^{-12}$, что увеличило вычислительные затраты.

4. Вычислительные затраты

Оценка вычислительных затрат при различных типах возбуждения электрического поля приведена в табл. 2, где N — количество конечных элементов в сеточном разбиении, DOFs — количество степеней свободы (размерность СЛАУ), t — время решения задачи, с.

Полученные в результате конечно-элементной дискретизации СЛАУ являются несимметричными и комплекснозначными, в качестве итерационного метода решения используется комбинированный решатель BICGStab+GMRES с выходом при относительной норме невязки $r > \alpha$. Вычисления выполнялись на ПК с процессором Intel® Core™ i5-4590 CPU 330 ГГц.

При возбуждении поля источником, расположенным вне тонкостенного цилиндрического объекта, использование модифицированной вариационной постановки позволяет

Т а б л и ц а 2. Вычислительные затраты при использовании модифицированной вариационной постановки в сравнении с классическим ВМКЭ

Table 2. Computational cost: modified variational formulation vs standard FEM

Вариант	Стандартная формулировка				Модифицированная формулировка			
	N	DOFs	α	t , с	N	DOFs	α	t , с
А	820 728	1 927 130	10^{-9}	5310.69	618 058	1 483 338	10^{-9}	4480.73
А, проводящее включение	833 468	1 958 120	10^{-9}	12 969.83	654 332	1 537 680	10^{-12}	21 064.06
Б	664 142	1 561 122	10^{-9}	31 102.24	453 940	1 067 098	10^{-9}	14 111.78

сократить вычислительные затраты, обеспечивая при этом корректную аппроксимацию тонкостенного сильнопроводящего цилиндра.

При возбуждении поля источником, расположенным внутри тонкостенного сильнопроводящего цилиндра, получение корректного решения требует повышения точности решения СЛАУ по сравнению с классическим МКЭ, что негативно сказывается на вычислительных затратах.

Заключение

Модифицированная вариационная постановка векторного метода конечных элементов, позволяющая учитывать сильнопроводящие тонкие объекты как токонесущие поверхности, рассмотрена в расчетных областях с цилиндрическими объектами при различных способах возбуждения электрического поля и расположения включения относительно источника.

При возбуждении поля генераторной петлей, расположенной внутри тонкостенного сильнопроводящего цилиндра, электрическое поле в области $\Omega_m = \Omega \setminus (\Omega_c \cup \Omega_w)$, экранированной сильнопроводящим цилиндром Ω_c , значительно ослабевает. Электрическое поле внутри области Ω_w , ограниченной цилиндрической оболочкой Ω_c , затухает на расстоянии r по оси OZ от центра генераторной петли. Расстояние r увеличивается при возрастании частоты. На внутренней и внешней поверхностях сильнопроводящей цилиндрической оболочки Ω_c наводится электрический ток, полярность вторичного электрического поля противоположна полярности электрического поля, возбуждаемого генераторной петлей. Решение, полученное модифицированной вариационной постановкой, корректно аппроксимирует напряженность электрического поля внутри подобласти Ω_w на расстоянии r по оси OZ от центра генераторной петли. При увеличении расстояния между генераторной петлей и внутренней поверхностью сильнопроводящего цилиндрического объекта Ω_c модифицированная постановка дает корректное решение на большем расстоянии r . В области $\Omega_m = \Omega \setminus (\Omega_c \cup \Omega_w)$ решение, полученное модифицированной постановкой, количественно и качественно отличается от решения, полученного классическим ВМКЭ. При наличии в области Ω_m проводящего объекта решение, полученное модифицированной вариационной постановкой, позволяет идентифицировать данный объект, однако требуется решение СЛАУ с более высокой точностью, чем при использовании стандартной постановки, что увеличивает вычислительные затраты и делает применение модифицированной постановки неоправданным.

При возбуждении электромагнитного поля генераторной петлей, расположенной вне цилиндрического объекта, поле от локального источника существенно ослабляется в области Ω_w , экранированной сильнопроводящей цилиндрической оболочкой Ω_c . На внешней поверхности цилиндрической оболочки Ω_c наводится электрический ток, порождающий вторичное электромагнитное поле. При расположении генераторной петли на расстоянии d ($d > 0.1$ м для рассмотренной расчетной области на частоте 1 МГц) по отношению к Ω_c решение, полученное модифицированной вариационной постановкой, является корректным в области $\Omega \setminus \Omega_c$. Использование модифицированной вариационной постановки позволяет сократить вычислительные затраты.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке ФНИ (проект № 0331-2019-0015).

Список литературы

- [1] Cuevas N.H., Pezzoli M. On the effect of the metal casing in surface-borehole electromagnetic methods. *Geophysics*. 2018; 83(3):E173–E187.
- [2] Cuevas N.H. Casing effect in borehole-surface (surface-borehole) EM fields. 74th Annual International Conference and Exhibition, EAGE. Extended Abstracts. 2012: 201.
- [3] Puzyrev V., Vilamajo E., Queralt P., Ledo J., Marcuello A. Three-dimensional modeling of the casing effect in onshore controlled-source electromagnetic surveys. *Surveys in Geophysics*. 2017; 38(2):527–545.
- [4] Tang W., Li Y., Swidinsky A., Liu J. Three-dimensional controlled source electromagnetic modelling with a well casing as a grounded source: A hybrid method of moments and finite element scheme. *Geophysical Prospecting*. 2015; 63(6):1491–1507.
- [5] Heagy L., Oldenburg D. Modeling electromagnetics on cylindrical meshes with applications to steel-cased wells. *Computers & Geosciences*. 2019; (125):115–130.
- [6] Pardo D., Torres-Verden C., Paszynski M. Numerical simulation of 3D EM borehole measurements using an hp-adaptive goal-oriented finite-element formulation. *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2007*. Society of Exploration Geophysicists; 2007: 653–657.
- [7] Haber E., Schwarzbach C., Shekhtman R. Modeling electromagnetic fields in the presence of casing. *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2016*. Society of Exploration Geophysicists; 2016: 959–964.
- [8] Schmidt K., Chernov A. A unified analysis of transmission conditions for thin conducting sheets in the time-harmonic eddy current model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2013; 73(6):1980–2003.
- [9] Леонтович М.А. О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел. *Исследования по распространению радиоволн*. М.; 1948: 5–22.
- [10] Durufle M., Haddar H., Joly P. Higher order generalized impedance boundary conditions in electromagnetic scattering problems. *Comptes Rendus Physique*. 2006; 7(5):533–542.
- [11] Senior T., Volakis J. *Approximate boundary conditions in electromagnetics*. London: The Institution of Electrical Engineers; 1995: 363. ISBN:9780852968499. DOI:10.1049/pbew041e.
- [12] Biro O., Preis K., Richter K.R., Heller R., Komarek P., Maurer W. FEM calculation of eddy current losses and forces in thin conducting sheets of test facilities for fusion reactor components. *IEEE Transactions on Magnetics*. 1992; 28(2):1509–1512.
- [13] Krahenbuhl L., Muller D. Thin layers in electrical engineering. Example of shell models in analysing eddy-currents by boundary and finite element methods. *IEEE Transactions on Magnetics*. 1993; (29):1450–1455.
- [14] Mayergoyz I.D., Bedrosian G. On calculation of 3-D eddy currents in conducting and magnetic shells. *IEEE Transactions on Magnetics*. 1995; 31(3):1319–1324.
- [15] Igarashi H., Kost A., Honma T. Impedance boundary condition for vector potentials on thin layers and its application to integral equations. *European Physical Journal Applied Physics*. 1998; (1):103–109.
- [16] Guerin C., Maunier G. 3-D magnetic scalar potential finite element formulation for conducting shells coupled with an external circuit. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2012; 48(2):823–826.
- [17] Nakata T., Takahashi N., Fujiwara K., Shirak Y. 3D magnetic field analysis using special elements. *IEEE Transactions on Magnetics*. 1990; 26(5):2379–2381.

- [18] **Peron V., Schmidt K., Durufle M.** Equivalent transmission conditions for the timeharmonic Maxwell equations in 3D for a medium with a highly conductive thin sheet. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2016; 76(3):1031–1052.
- [19] **Schmidt K., Hiptmair R.** Asymptotic boundary element methods for thin conducting sheets. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S*. 2015; 8(3):619–647.
- [20] **Jagadeesh Chandra R.B., Shivamurthy B., Kulkarni S.D., Kumar M.S.** Hybrid polymer composites for EMI shielding application—a review. *Materials Research Express*. 2019; 6(8). DOI:10.1088/2053-1591/aaff00.
- [21] **Fujita S., Igarashi H.** Reduction of eddy current loss in rectangular coils using magnetic shield: Analysis with homogenization method. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2019; 55(6):1–4.
- [22] **Jablonski P.** Approximate BEM analysis of a thin electromagnetic shield of variable thickness. *Przegląd Elektrotechniczny*. 2012; 88(3):61–63.
- [23] **Бондина Н.Н., Михайлов В.М.** О приближении плоской волны в расчетах проникновения электромагнитного поля в тонкие проводящие оболочки. *Электротехника и электромеханика*. 2011; (6):52–56.
- [24] **Sabariego R.V., Sergeant P., Gyselinck J., Dular P., Dupro L., Geuzaine C.** Finite-element analysis of a shielded pulsed-current induction heater — experimental validation of a time-domain thin-shell approach. *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*. 2010; 29(6):1585–1595.
- [25] **Шурина Э.П., Добролюбова Д.В., Штанько Е.И.** Редуцированная вариационная постановка для моделирования гармонического электромагнитного поля в областях с малыми проводящими включениями. *Вычислительные технологии*. 2018; 23(3):92–108.
- [26] **Monk P.** *Finite element methods for Maxwell's equations*. Oxford University Press; 2003: 450.
- [27] **Webb J.P.** Hierarchical vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1999; 47(8):1244–1253.
- [28] **Треногин В.А.** *Функциональный анализ: Учебник*. М.: Наука; 1980: 496.

Application of a modified variational formulation of the vector finite element method for modelling a harmonic electric field in areas with curved shields

DOBROLYUBOVA DARYA V.¹, SHURINA ELLA P.^{1,2,*}

¹Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 630090, Novosibirsk, Russia

²Novosibirsk State Technical University, 630073, Novosibirsk, Russia

*Corresponding author: Shurina Ella P., e-mail: shurina@sinor.ru

Received March 27, 2021, revised April 28, 2021, accepted May 4, 2021.

Abstract

Purpose. The paper addresses applicability of the modified variational formulation of vector FEM for the harmonic electric field to the media with cylindrical shields. Thin highly conductive

objects are treated as surfaces with the equivalent surface current density. We consider the excitation of the field by a local source (current loop) located either inside or outside the cylindrical shield.

Methodology. The simulations are carried out on unstructured tetrahedral meshes. Since the modified variational formulation treats thin highly conductive objects as surfaces, only the surface of a cylinder is discretized. The results yielded by the modified variational formulation are compared with the results of the classic vector FEM.

Findings. For the frequency range between 100 KHz and 100 MHz, the modified variational formulation provides correct results when the field source is located outside the cylindrical shield. The modified variational formulation reduces computational cost, since the volume of the thin shield is not discretized. When the field source is located inside the shield, the modified variational formulation gives valid results only in the proximity of the source.

Originality/value. The limitations for the application of the reduced variational formulation for the modelling of harmonic electric field in the media with hollow cylindrical shields are investigated.

Keywords: vector finite element method, reduced models, electromagnetic shielding.

Citation: Dobrolyubova D.V., Shurina E.P. Application of a modified variational formulation of the vector finite element method for modelling a harmonic electric field in areas with curved shields. Computational Technologies. 2021; 26(3):26–41. DOI:10.25743/ICT.2021.26.3.003. (In Russ.)

Acknowledgements. This research was partly supported by Fundamental Scientific Research Program No. 0331-2019-0015.

References

1. **Cuevas N.H., Pezzoli M.** On the effect of the metal casing in surface-borehole electromagnetic methods. *Geophysics*. 2018; 83(3):E173–E187.
2. **Cuevas N.H.** Casing effect in borehole-surface (surface-borehole) EM fields. 74th Annual International Conference and Exhibition, EAGE. Extended Abstracts. 2012: 201.
3. **Puzyrev V., Vilamajo E., Queralt P., Ledo J., Marcuello A.** Three-dimensional modeling of the casing effect in onshore controlled-source electromagnetic surveys. *Surveys in Geophysics*. 2017; 38(2):527–545.
4. **Tang W., Li Y., Swidinsky A., Liu J.** Three-dimensional controlled source electromagnetic modelling with a well casing as a grounded source: A hybrid method of moments and finite element scheme. *Geophysical Prospecting*. 2015; 63(6):1491–1507.
5. **Heagy L., Oldenburg D.** Modeling electromagnetics on cylindrical meshes with applications to steel-cased wells. *Computers & Geosciences*. 2019; (125):115–130.
6. **Pardo D., Torres-Verden C., Paszynski M.** Numerical simulation of 3D EM borehole measurements using an hp-adaptive goal-oriented finite-element formulation. *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2007*. Society of Exploration Geophysicists; 2007: 653–657.
7. **Haber E., Schwarzbach C., Shekhtman R.** Modeling electromagnetic fields in the presence of casing. *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2016*. Society of Exploration Geophysicists; 2016: 959–964.
8. **Schmidt K., Chernov A.** A unified analysis of transmission conditions for thin conducting sheets in the time-harmonic eddy current model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2013; 73(6):1980–2003.
9. **Leontovich M.A.** O priblizhennykh granichnykh usloviyakh dlya elektromagnitnogo polya na poverkhnosti khorosho provodyashchikh tel [On approximate boundary conditions for the electromagnetic field on the surface of well-conducting bodies]. *Issledovaniya po Rasprostraneniyu Radiovoln*. Moscow; 1948: 5–22. (In Russ.)
10. **Durufle M., Haddar H., Joly P.** Higher order generalized impedance boundary conditions in electromagnetic scattering problems. *Comptes Rendus Physique*. 2006; 7(5):533–542.
11. **Senior T., Volakis J.** Approximate boundary conditions in electromagnetics. London: The Institution of Electrical Engineers; 1995: 363. ISBN:9780852968499. DOI:10.1049/pbew041e.
12. **Biro O., Preis K., Richter K.R., Heller R., Komarek P., Maurer W.** FEM calculation of eddy current losses and forces in thin conducting sheets of test facilities for fusion reactor components. *IEEE Transactions on Magnetics*. 1992; 28(2):1509–1512.

13. **Krahenbuhl L., Muller D.** Thin layers in electrical engineering. Example of shell models in analysing eddy-currents by boundary and finite element methods. *IEEE Transactions on Magnetics*. 1993; (29):1450–1455.
14. **Mayergoyz I.D., Bedrosian G.** On calculation of 3-D eddy currents in conducting and magnetic shells. *IEEE Transactions on Magnetics*. 1995; 31(3):1319–1324.
15. **Igarashi H., Kost A., Honma T.** Impedance boundary condition for vector potentials on thin layers and its application to integral equations. *European Physical Journal Applied Physics*. 1998; (1):103–109.
16. **Guerin C., Maunier G.** 3-D magnetic scalar potential finite element formulation for conducting shells coupled with an external circuit. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2012; 48(2):823–826.
17. **Nakata T., Takahashi N., Fujiwara K., Shirak Y.** 3D magnetic field analysis using special elements. *IEEE Transactions on Magnetics*. 1990; 26(5):2379–2381.
18. **Peron V., Schmidt K., Durufle M.** Equivalent transmission conditions for the timeharmonic Maxwell equations in 3D for a medium with a highly conductive thin sheet. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2016; 76(3):1031–1052.
19. **Schmidt K., Hiptmair R.** Asymptotic boundary element methods for thin conducting sheets. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S*. 2015; 8(3):619–647.
20. **Jagadeesh Chandra R.B., Shivamurthy B., Kulkarni S.D., Kumar M.S.** Hybrid polymer composites for EMI shielding application—a review. *Materials Research Express*. 2019; 6(8). DOI:10.1088/2053-1591/aaff00.
21. **Fujita S., Igarashi H.** Reduction of eddy current loss in rectangular coils using magnetic shield: Analysis with homogenization method. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2019; 55(6):1–4.
22. **Jablonski P.** Approximate BEM analysis of a thin electromagnetic shield of variable thickness. *Przeglad Elektrotechniczny*. 2012; 88(3):61–63.
23. **Bondina N.N., Mikhailov V.M.** O priblizhenii ploskoi volny v raschetakh proniknoveniia elektromagnitnogo polia v tonkie provodiashchie obolochki [On the plane wave approximation in computation of the electromagnetic field penetration into thin conductive shells]. *Electrical Engineering and Electromechanics*. 2011; (6):52–56. (In Russ.)
24. **Sabariego R.V., Sergeant P., Gyselinck J., Dular P., Dupro L., Geuzaine C.** Finite-element analysis of a shielded pulsed-current induction heater — experimental validation of a time-domain thin-shell approach. *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*. 2010; 29(6):1585–1595.
25. **Shurina E.P., Dobrolyubova D.V., Shtanko E.I.** A reduced formulation for modelling time-harmonic electromagnetic field in the media with thin highly conductive inclusions. *Computational Technologies*. 2018; 23(3):92–108. (In Russ.)
26. **Monk P.** *Finite element methods for Maxwell's equations*. Oxford University Press; 2003: 450.
27. **Webb J.P.** Hierarchical vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1999; 47(8):1244–1253.
28. **Trenogin V.A.** *Funktional'nyy analiz: Uchebnik [Functional analysis]*. Moscow: Nauka; 1980: 496. (In Russ.)